BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM HỌC 2022 - 2023
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Môn: **TOÁN** Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)* Ngày thi: **24/02/2023** Đề thi gồm 01 trang, 04 bài

Bài 1 (5,0 *điểm*)

Xét dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n}$ và $0 \le a_n \le 1$, với mọi $n \ge 1$.

a) Chứng minh rằng dãy (a_n) xác định duy nhất và có giới hạn hữu hạn.

b) Cho dãy số (b_n) xác định bởi $b_n = (1 + 2a_1)(1 + 2^2 a_2)\cdots(1 + 2^n a_n)$ với mọi $n \ge 1$. Chứng minh rằng dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 (5,0 *điểm*)

Cho các số nguyên a, b, c, α, β và dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = \alpha,\ u_2 = \beta,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \text{ với mọi } n \ge 1.$$

a) Chứng minh rằng nếu $a = 3, b = -2, c = -1$ thì có vô số cặp số nguyên $(\alpha; \beta)$ để $u_{2023} = 2^{2022}$.

b) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho có duy nhất một trong hai khẳng định sau là đúng:

i) Có vô số số nguyên dương m để $u_{n_0} u_{n_0+1} \cdots u_{n_0+m}$ chia hết cho 7^{2023} hoặc 17^{2023};

ii) Có vô số số nguyên dương k để $u_{n_0} u_{n_0+1} \cdots u_{n_0+k} - 1$ chia hết cho 2023.

Bài 3 (5,0 *điểm*)

Tìm số thực dương k lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{1}{kab + c^2} + \frac{1}{kbc + a^2} + \frac{1}{kca + b^2} \ge \frac{k+3}{a^2 + b^2 + c^2}$$

đúng với mọi bộ ba số thực dương $(a; b; c)$ thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$.

Bài 4 (5,0 *điểm*)

Cho tứ giác $ABCD$ có $DB = DC$ và nội tiếp một đường tròn. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, AC và J, E, F tương ứng là các tiếp điểm của đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với BC, CA, AB. Đường thẳng MN cắt JE, JF lần lượt tại K, H; IJ cắt lại đường tròn (IBC) tại G và DG cắt lại (IBC) tại T.

a) Chứng minh rằng JA đi qua trung điểm của HK và vuông góc với IT.

b) Gọi R, S tương ứng là hình chiếu vuông góc của D trên AB, AC. Lấy các điểm P, Q lần lượt trên IF, IE sao cho KP và HQ đều vuông góc với MN. Chứng minh rằng ba đường thẳng MP, NQ và RS đồng quy.

-------------------- HẾT --------------------

- *Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM HỌC 2022 - 2023

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: **25/02/2023**
Đề thi gồm 01 trang, 03 bài

Bài 5 (6,0 *điểm*)
Xét các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ và $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(0)=2022$ và

$$f\left(x+g(y)\right)=xf(y)+(2023-y)f(x)+g(x) \text{ với mọi } x,y\in\mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng f là một toàn ánh và g là một đơn ánh.
b) Tìm tất cả các hàm số f và g thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài 6 (7,0 *điểm*)
Có $n\geq 2$ lớp học tổ chức $m\geq 1$ tổ ngoại khóa cho học sinh. Lớp nào cũng có học sinh tham gia ít nhất một tổ ngoại khóa. Mọi tổ ngoại khóa đều có đúng a lớp có học sinh tham gia. Với hai tổ ngoại khóa bất kỳ, có không quá b lớp có học sinh tham gia đồng thời cả hai tổ này.

a) Tính m khi $n=8$, $a=4$, $b=1$.
b) Chứng minh rằng $n\geq 20$ khi $m=6$, $a=10$, $b=4$.
c) Tìm giá trị nhỏ nhất của n khi $m=20$, $a=4$, $b=1$.

Bài 7 (7,0 *điểm*)
Cho tam giác nhọn, không cân ABC có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại M, N, P. Gọi Ω_A là một đường tròn đi qua A, tiếp xúc ngoài với (I) tại một điểm A' và cắt lại AB, AC tương ứng tại A_b, A_c. Các đường tròn Ω_B, Ω_C và các điểm B', B_a, B_c, C', C_a, C_b được xác định một cách tương tự.

a) Chứng minh rằng $B_cC_b+C_aA_c+A_bB_a\geq NP+PM+MN$.
b) Xét trường hợp A', B', C' tương ứng thuộc các đường thẳng AM, BN, CP. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh tương ứng thuộc ba đường thẳng A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b. Chứng minh rằng OH song song với IK.

-------------------- HẾT --------------------

- *Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM HỌC 2022 - 2023
HƯỚNG DẪN CHẤM THI Đề thi chính thức	Môn: TOÁN Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)* Ngày thi: 24/02/2023 và 25/02/2023 Hướng dẫn chấm thi gồm 11 trang

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

1. Giám khảo chấm đúng như đáp án, biểu điểm của Bộ Giáo dục và Đào tạo.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

II. ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM

Bài	Ý	Đáp án	Thang điểm
1	a	Viết lại biểu thức $a_{n+1}=\sqrt[3]{3a_{n+1}-a_n}$ dưới dạng $$a_n=3a_{n+1}-a_{n+1}^3,\quad n=1,2,\ldots$$ Xét hàm số $f(x)=3x-x^3$. Khi đó, ta có $$f'(x)=3-3x^2\geq 0 \text{ với mọi } 0\leq x\leq 1.$$ Điều này suy ra hàm f đồng biến trên $[0;1]$. Vì vậy, từ $$a_1=\frac{1}{2}\in[f(0);f(1)]=[0;2],$$ suy ra a_2 là nghiệm duy nhất của phương trình $a_1=3x-x^3$ trên $[0;1]$. Tiếp tục quá trình trên ta nhận được dãy (a_n), trong đó a_n là nghiệm duy nhất của phương trình $a_{n-1}=3x-x^3$ trên $[0;1]$ với $n=1,2,\ldots$ Vậy dãy (a_n) xác định duy nhất. Mặt khác, ta có $$a_n-a_{n+1}=2a_{n+1}-a_{n+1}^3\geq a_{n+1}-a_{n+1}^3=a_{n+1}\left(1-a_{n+1}^2\right)\geq 0$$ với mọi $n=1,2,\ldots$ Vì vậy (a_n) dãy giảm và bị chặn dưới. Do đó, (a_n) là dãy hội tụ (có giới hạn hữu hạn). **Ghi chú.** Thí sinh có thể chứng minh bằng quy nạp $a_n=2\sin\frac{\alpha}{3^{n-1}}$ với mọi n.	
	b	Dễ thấy $\frac{b_{n+1}}{b_n}=1+2^{n+1}a_{n+1}\geq 1$ với mọi n nên (b_n) là dãy tăng. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp $a_n<\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ với mọi n. Thật vậy, $n=1$ thì $a_1=\frac{1}{2}<1$. Giả thiết quy nạp đúng với $n=k$, tức là	

$$a_k < \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}.$$

Ta có a_{k+1} là nghiệm duy nhất của phương trình

$$a_k = 3x - x^3 \text{ trên } [0;\, 1].$$

Ta thấy rằng

$$f\left(\left(\frac{2}{5}\right)^k\right) = 3\left(\frac{2}{5}\right)^k - \left(\frac{2}{5}\right)^{3k} > \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} > a_k = f\left(a_{k+1}\right).$$

Từ f đồng biến suy ra $a_{k+1} < \left(\frac{2}{5}\right)^k$. Ta nhận được $a_n < \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$ Ta có

$$\begin{aligned}\ln b_n &= \ln\left(1+2a_1\right)\left(1+2^2a_2\right)\cdots\left(1+2^na_n\right)\\ &= \ln\left(1+2a_1\right)+\ln\left(1+2^2a_2\right)+\cdots+\ln\left(1+2^na_n\right)\\ &\le 2a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n\\ &\le 2\left[1+\left(\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right]\le 10.\end{aligned}$$

với mọi n. Suy ra $b_n \le e^{10}$ với mọi n. Vậy dãy (b_n) bị chặn trên nên nó hội tụ (có giới hạn hữu hạn).

Ghi chú. Nếu thí sinh chứng minh $a_n = 2\sin\frac{\alpha}{3^{n-1}}$ thì có thể suy ra $a_n < \frac{2\alpha}{3^{n-1}}$.

Tổng điểm Bài 1 | 5,00

2

Ta có $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n - 1$. Suy ra $u_{n+2} - u_{n+1} - 1 = 2(u_{n+1} - u_n - 1)$ với mọi n.

Vậy $u_{n+1} - u_n - 1 = 2^{n-1}(u_2 - u_1 - 1)$ với mọi n. Do đó, ta được

$$\begin{cases} u_{2023} - u_{2022} - 1 = 2^{2021}\left(u_2 - u_1 - 1\right)\\ u_{2022} - u_{2021} - 1 = 2^{2020}\left(u_2 - u_1 - 1\right)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_2 - u_1 - 1 = 2^0\left(u_2 - u_1 - 1\right)\end{cases}.$$

Vậy

$$\begin{aligned}u_{2023} - u_1 - 2022 &= \left(2^{2021}+\cdots+2^0\right)(u_2 - u_1 - 1)\\ &= \left(2^{2022}-1\right)\left(u_2 - u_1 - 1\right).\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}u_{2023} = 2^{2022} &\Leftrightarrow 2^{2022} = \left(2^{2022}-1\right)(u_2 - u_1 - 1) + u_1 + 2022\\ &\Leftrightarrow \left(2^{2022}-1\right)u_2 = \left(2^{2022}-1\right)u_1 - u_1 + 2^{2023} - 2023\\ &\Leftrightarrow u_2 = u_1 + 2 - \frac{u_1 + 2021}{2^{2022}-1}.\end{aligned}$$

Vậy các cặp số nguyên $(\alpha; \beta)$ là $\left(\left(2^{2022}-1\right)m - 2021;\ \left(2^{2022}-2\right)m - 2019\right)$ với m là số nguyên tùy ý.

b

Giả sử trong dãy (u_n) tồn tại vô số số chia hết cho 7 hoặc tồn tại vô số số chia hết cho 17. Khi đó, $u_1 \cdot u_2 \cdots u_n$ chia hết cho 7^{2023} hoặc 17^{2023} với mọi số nguyên dương n đủ lớn, và với mọi số dương n đủ lớn đó, $u_1 \cdot u_2 \cdots u_n - 1$ không chia hết cho $2023 = 7 \cdot 17^2$. Do đó, lấy $n_0 = 1$ thì khẳng định i) đúng và khẳng định ii) sai.

Bây giờ ta xét trường hợp dãy (u_n) không có hoặc có hữu hạn số chia hết cho 7 hoặc 17, tức là, u_n nguyên tố cùng nhau với 2023, với mọi n đủ lớn.

Gọi r_n là số dư khi chia u_n cho 2023. Khi đó, tồn tại số nguyên dương n_1 để $(r_n, 2023) = 1$ với mọi $n \ge n_1$. Các cặp số $(r_n; r_{n+1})$ chỉ nhận hữu hạn khả năng, do đó, theo Nguyên lý Dirichlet, tồn tại các số nguyên dương n_0, s, $(n_0 > n_1)$ sao cho

$$\left(r_{n_0}; r_{n_0+1}\right) = \left(r_{n_0+s}; r_{n_0+s+1}\right).$$

Với n_0 đã chọn, rõ ràng i) không đúng.

Với mọi số nguyên dương m, ta có $r_{n_0+m} = r_{n_0+r(m)}$, với $r(m)$ là số dư khi chia cho s của m.

Lấy $k = \varphi(2023)ts - 1$ với t là số nguyên dương tùy ý, (φ là hàm Euler). Khi đó,

$$\begin{aligned} u_{n_0} \cdot u_{n_0+1} \cdots u_{n_0+k} &\equiv r_{n_0} \cdot r_{n_0+1} \cdots r_{n_0+\varphi(2023)ts-1} \\ &\equiv \left(r_{n_0}\right)^{\varphi(2023)t} \left(r_{n_0+1}\right)^{\varphi(2023)t} \cdots \left(r_{n_0+s-1}\right)^{\varphi(2023)t} \\ &\equiv 1 \pmod{2023}. \end{aligned}$$

Tổng điểm bài 2 | **5,00**

3

Bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{kab+c^2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{kbc+a^2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{kca+b^2} \ge k+3.$$

Rõ ràng đây là một bất đẳng thức đồng bậc nên không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử $a^2+b^2+c^2=2$. Kết hợp với giả thiết, ta được $ab+bc+ca=1$ và $a+b+c=2$. Khi đó, bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{1}{kab+c^2} + \frac{1}{kbc+a^2} + \frac{1}{kca+b^2} \ge \frac{k+3}{2}. \qquad (1)$$

Cho $a = b = \dfrac{1}{3}$ và $c = \dfrac{4}{3}$ vào (1), ta được

$$\frac{9}{k+16} + \frac{18}{4k+1} \ge \frac{k+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (k-2)\left(\frac{8}{4k+1} + \frac{1}{2(k+16)} + \frac{1}{2}\right) \le 0 \Leftrightarrow k \le 2.$$

Ta sẽ chứng minh $k=2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán, tức là ta cần chứng minh

$$\frac{1}{2ab+c^2} + \frac{1}{2bc+a^2} + \frac{1}{2ca+b^2} \ge \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{\sum_{a,b,c}\left(2bc+a^2\right)\left(2ab+c^2\right)}{\left(2bc+a^2\right)\left(2ca+b^2\right)\left(2ab+c^2\right)} \ge \frac{5}{2}. \qquad (2)$$

Chú ý rằng

$$\sum_{a,b,c}\left(2bc+a^2\right)\left(2ab+c^2\right)=\sum_{a,b,c}\left(4ab^2c+2a^3b+2bc^3+c^2a^2\right)$$
$$=\sum_{a,b,c}\left[4ab^2c+c^2a^2+2\left(1-ac\right)\left(2-b^2-ca\right)\right]$$
$$=6\sum_{a,b,c}ab^2c+3\sum_{a,b,c}c^2a^2+2.$$

Ta thấy rằng

$$6\sum_{a,b,c}ab^2c=6abc\left(a+b+c\right)=12abc$$

và

$$3\sum_{a,b,c}c^2a^2=3\left[\left(ab+bc+ca\right)^2-2abc\left(a+b+c\right)\right]=3\left(1-4abc\right)=3-12abc.$$

Kết hợp các kết quả trên, ta được

$$\sum_{a,b,c}\left(2bc+a^2\right)\left(2ca+b^2\right)=5. \qquad (3)$$

Mặt khác, ta có

$$\left(2bc+a^2\right)\left(2ca+b^2\right)\left(2ab+c^2\right)=9a^2b^2c^2+4abc\left(a^3+b^3+c^3\right)+2\left(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\right).$$

Chú ý rằng

$$a^3+b^3+c^3=2+3abc$$

và

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=1-6abc+3a^2b^2c^2.$$

Đặt $abc=r\left(r>0\right)$ thì

$$\left(2bc+a^2\right)\left(2ca+b^2\right)\left(2ab+c^2\right)$$
$$=9r^2+4r\left(2+3r\right)+2\left(1-6r+3r^2\right)=27r^2-4r+2. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), ta thấy rằng bất đẳng thức (2) tương đương với

$$\frac{5}{27r^2-4r+2}\geq\frac{5}{2}\Leftrightarrow 27r^2-4r\leq 0 \text{ (vì } 27r^2-4r+2>0\text{)}.$$

Xét hàm số

$$f\left(x\right)=\left(x-a\right)\left(x-b\right)\left(x-c\right)=x^3-2x^2+x-r$$

trên $\mathbb{R}$. Khi đó, ta có $f'\left(x\right)=3x^2-4x^2+1$. Do đó

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=\frac{1}{3}.$$

Do hàm số f có ba nghiệm là a,b,c nên ta có

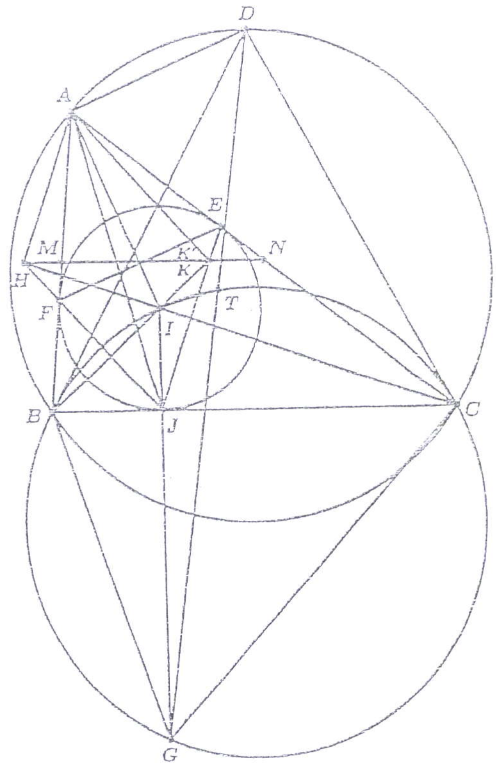
$$f\left(1\right)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)\leq 0\Leftrightarrow r\left(r-\frac{4}{27}\right)\leq 0\Leftrightarrow 27r^2-4r\leq 0.$$

Do đó bất đẳng thức (2) được chứng minh.

Chú ý. Ngoài cách chứng minh $0<r\leq\frac{4}{27}$ như ở trên, học sinh có thể chỉ ra kết quả này bằng việc sử dụng đồng nhất thức $\left(a-b\right)^2\left(b-c\right)^2\left(c-a\right)^2=4r-27r^2$.

Tổng điểm bài 3	5,00

4 a Xét thế hình như hình vẽ.



Gọi K' là giao của BI với MN. Ta có

$$\widehat{MBK'} = \widehat{K'BC} = \widehat{BK'M},$$

suy ra tam giác $MK'B$ cân tại M. Do đó

$$MK' = MB = MA.$$

Vì vậy tam giác $K'AB$ vuông tại K', dẫn đến tứ giác $IAEK'$ nội tiếp. Từ đây, ta có

$$\widehat{CEK'} = \widehat{AIK'} = \widehat{EFJ} \text{ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)} = \widehat{CEJ},$$

nên J, E, K' thẳng hàng. Thành thử $K' \equiv K$ và ta được $AK \perp KB$. Để ý rằng $JH \perp KB$ suy ra $AK // JH$. Tương tự cũng có $AH // JK$. Vậy $AKJH$ là hình bình hành. Suy ra JA đi qua trung điểm KH.

Bây giờ, để ý rằng

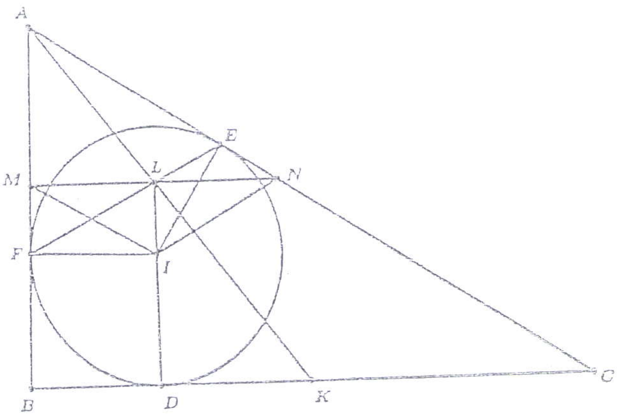
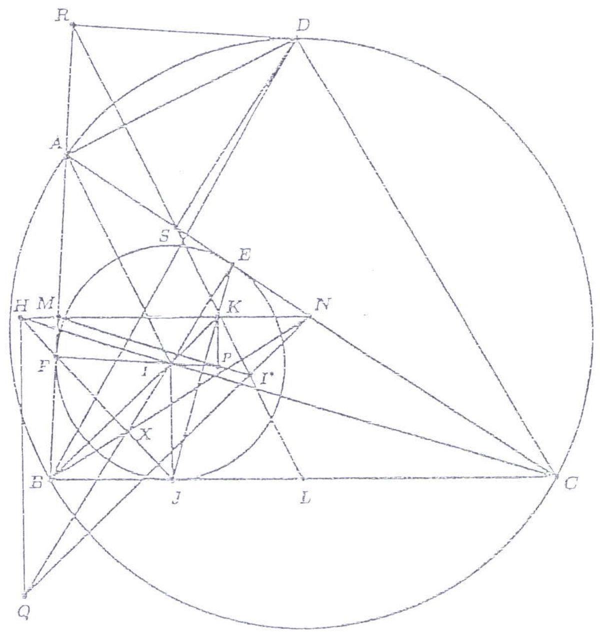
$$\widehat{BGC} = \widehat{BGI} + \widehat{CGI} = \widehat{BCI} + \widehat{CBI}$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \widehat{CBD} = \widehat{BCD},$$

(do D là trung điểm của cung $\widehat{BAC}$). Suy ra DB, DC là các tiếp tuyến với đường tròn (IBC) nên $TBGC$ là tứ giác điều hòa, kéo theo $I(BCTG) = -1$. Vì JA đi qua trung điểm của HK và $JB // HK$ nên $J(HKAB) = -1$ và do

$$JH \perp IB,\ JK \perp IC,\ JB \perp IG,$$

ta suy ra $JA \perp IT$.

b	Trước hết, ta chứng minh bổ đề dưới đây. *Bổ đề.* Cho tam giác ABC. Gọi K là trung điểm của BC và D, E, F tương ứng là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) với BC, CA, AB. Khi đó, ba đường thẳng AK, ID và EF đồng qui.  Thật vậy, gọi L là giao điểm của DI với EF. Đường thẳng qua L và song song với BC lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Để ý rằng các tứ giác $IFML$ và $INEL$ nội tiếp nên ta có $\widehat{IMN} = \widehat{IFE} = \widehat{IEF} = \widehat{INM}.$ Do đó tam giác IMN cân tại I nên L là trung điểm của MN. Từ MN song song với BC suy ra A, L, K thẳng hàng. Vậy AK, ID và EF đồng quy. Bổ đề được chứng minh. Tiếp theo, xét thế hình như hình vẽ.  Áp dụng bổ đề cho tam giác BAC, ta được BN, FJ và IE đồng quy tại một điểm X. Do $JI // HQ$ và $JB // HK$ nên	

		$\dfrac{XQ}{XI}=\dfrac{XH}{XJ}=\dfrac{XN}{XB}\Rightarrow QN\,//\,IB.$ Tương tự, ta cũng suy ra được $PM\,//\,IC$. Gọi Y là trọng tâm của tam giác ABC, L là trung điểm của BC. Xét phép vị tự $\mathcal{H}=\mathcal{H}\left(Y,\dfrac{1}{3}\right)$. Khi đó, ta có $\mathcal{H}: A, B, C \mapsto L, N, M.$ Để ý rằng $PM\,//\,CI$, $QN\,//\,BI$ nên PM, QN tương ứng là ảnh của CI, BI qua phép vị tự $\mathcal{H}$. Suy ra giao điểm của I^* của PM, QN là ảnh của I nên nó chính là tâm nội tiếp của ΔLNM. Cuối cùng, ta chứng minh RS song song với AI và đi qua trung điểm L của BC. Để ý rằng AD là phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$ và tứ giác $ARDS$ nội tiếp nên ta có $\widehat{ARS}=\widehat{ADS}=90^\circ-\widehat{DAS}=\widehat{CAI}.$ Suy ra $RS\,//\,AI$. Bây giờ để ý rằng L, S, R tương ứng là hình chiếu của D lên BC, CA, AB nên theo tính chất của đường thẳng Simson ta có các điểm L, S, R thẳng hàng. Đường thẳng RS đi qua L và song song với AI nên nó là ảnh của AI qua phép vị tự $\mathcal{H}$ và do đó đi qua điểm I^* là ảnh của I. Vậy MP, NQ và RS đồng quy.	
		Tổng điểm bài 4	**5,00**
5	a	Theo giả thiết, ta có $f(x+g(y))=xf(y)+(2023-y)f(x)+g(x)$ với mọi $x, y\in\mathbb{R}$. (1) Thay $x=0$ vào (1), ta được $f(g(y))=2022(2023-y)+a,\quad \forall y\in\mathbb{R},$ (2) trong đó $a=g(0)$. Với mỗi $z\in\mathbb{R}$, từ (2) ta thấy rằng luôn tồn tại $x=g\left(2023-\dfrac{z-a}{2022}\right)$ sao cho $f(x)=z$. Do đó, hàm f là một toàn ánh. Nếu $g(y_1)=g(y_2)$ với $y_1, y_2\in\mathbb{R}$ thì từ (2), ta có $2022(2023-y_1)+a=2022(2023-y_2)+a.$ Suy ra $y_1=y_2$, hay g là một đơn ánh.	
	b	Thay x bởi $g(x)$ trong (1), ta được $f(g(x)+g(y))=g(x)f(y)+(2023-y)f(g(x))+g(g(x)), \forall x\in\mathbb{R}.$ (3) Đổi vai trò của x và y trong (3), ta có $f(g(y)+g(x))=g(y)f(x)+(2023-x)f(g(y))+g(g(y)), \forall x\in\mathbb{R}.$ (4) Từ (2), (3) và (4), ta được $g(x)f(y)+ax+g(g(x))=g(y)f(x)+ay+g(g(y)),\ \forall x, y\in\mathbb{R}.$ (5) Vì f là một toàn ánh nên tồn tại $b\in\mathbb{R}$ sao cho $f(b)=0$. Hơn nữa, ta có $b\neq 0$ vì $f(0)\neq 0$. Thay $y=b$ vào (5), ta thu được $ax+g(g(x))=g(b)f(x)+ab+g(g(b)),\ \forall x\in\mathbb{R}.$ (6) Kết hợp (5) với (6), ta suy ra	

$$g(x)f(y)+g(b)f(x)=g(y)f(x)+g(b)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (7)$$

Thay $y=0$ trong (7), ta được

$$g(x)=\frac{a-g(b)}{2022}f(x)+g(b)=kf(x)+g(b),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (8)$$

Do g là một đơn ánh nên $a=g(0)\neq g(b)$. Suy ra $k\neq 0$. Từ (8) và (1), ta có

$$f(x+kf(y)+g(b))=xf(y)+(2023+k-y)f(x)+g(b),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (9)$$

Thế $y=k+2023$ trong (9), ta được

$$f(x+kf(k+2023)+g(b))=xf(k+2023)+g(b),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x)=px+2022,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Do f là toàn ánh nên $p\neq 0$. Kết hợp điều này với (8), ta được $g(x)=ux+v,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (u\neq 0)$. Thay hai kết quả vừa tìm được vào (1), ta suy ra

$$p(x+uy+v)+2022=x(py+2022)+(2023-y)(px+2022)+ux+v,\ \forall x,y\in\mathbb{R},$$

hay ta có

$$(u+2022p+2022)x-(up+2022)y+v-pv+2022^2=0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Từ đẳng thức trên, ta suy ra

$$\begin{cases} u+2022p+2022=0\\ up+2022=0\\ v-pv+2022^2=0\end{cases}.$$

Giải hệ phương trình trên, ta được

$$p=-\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ u=1011(\sqrt{5}-1),\ v=-1011^2(\sqrt{5}-1)^2;$$

hoặc

$$p=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ u=-1011(\sqrt{5}+1),\ v=-1011^2(\sqrt{5}+1)^2.$$

Vì vậy, có hai cặp hàm

$$f(x)=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+2022,\quad g(x)=1011(\sqrt{5}-1)x-1011^2(\sqrt{5}-1)^2,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

và

$$f(x)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+2022,\quad g(x)=-1011(\sqrt{5}+1)x-1011^2(\sqrt{5}+1)^2,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

thỏa mãn điều kiện bài toán.

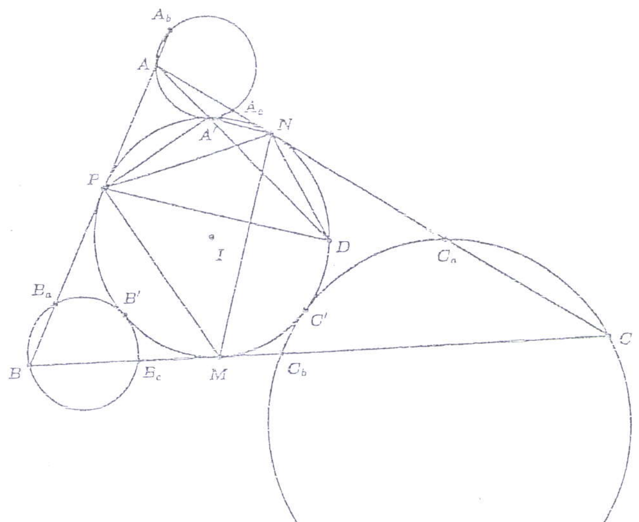
Tổng điểm bài 5 6,00

6 Ký hiệu $A=\{a_1;a_2;...;a_n\}$ là tập hợp các lớp, A_i là tập hợp các lớp có học sinh tham gia tổ thứ i, d_i là số tổ mà a_i có học sinh tham gia. Dễ thấy $ma=\sum_{i=1}^{n}d_i$.

a Dễ thấy $m>1$ do $A=A_1\cup....\cup A_m$, $|A_i|=4$.

Mặt khác $m\leq 2$, vì nếu $m\geq 3$ thì

$$8\geq|A_1\cup A_2\cup A_3|=\sum_{i=1}^{3}|A_i|-\sum_{1\leq i<j\leq 3}^{3}|A_i\cap A_j|+|A_1\cap A_2\cap A_3|\geq 12-3=9,\ \text{vô lý}.$$

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Ngoài ra, cách chia 8 lớp thành 2 tổ
$$A_1 = \{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4\},\ A_2 = \{a_5;\ a_6;\ a_7;\ a_8\}$$
thỏa mãn bài toán. Vậy ta có $m = 2$.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>b</td><td>Số bộ $(A_i;\ A_j;\ x)$, $x \in A_i \cap A_j$ không vượt quá bC_m^2 và bằng $\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^2$. Ta có:
$$bC_m^2 \geq \sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \sum_{i=1}^{n} d_i}{2} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} d_i}{2n} = \frac{(ma)^2 - nma}{2n}.$$
Ta có $n \geq \frac{(ma)^2}{2bC_m^2 + ma}$. Khi $m = 6$, $a = 10$, $b = 4$ thì $n \geq 20$.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>c</td><td>Ta xét 2 trường hợp:
- Nếu có một lớp x tham gia ≥ 5 tổ. Khi đó số lớp tham gia các tổ này $\geq 1 + 3 \cdot 5 = 16$.
- Nếu mỗi lớp tham gia không quá 4 tổ. Số lớp tham gia các tổ này $\geq \frac{4 \cdot 20}{4} = 20$.
Vậy ta có $n \geq 16$. Để xây dựng ví dụ $n = 16$ thỏa mãn bài toán ta điền 1 đến 16 vào các ô bảng 4×4, lấy các dòng, các cột và các bộ 4 phần tử không thẳng hàng, thẳng cột. Các tập con:
{1; 2; 3; 4}, {5; 6; 7; 8}, {9; 10; 11; 12}, {13; 14; 15; 16}, {1; 5; 9; 13},
{2; 6; 10; 14}, {3; 7; 11; 15}, {4; 8; 12; 16}, {1; 6; 11; 16}, {1; 7; 12; 14},
{1; 10; 15; 8}, {2; 5; 12; 15}, {2; 8; 11; 13}, {2; 16; 9; 7}, {3; 8; 9; 14},
{4; 7; 10; 13}, {4; 6; 9; 15}, {4; 5; 11; 14}, {3; 12; 13; 6}, {3; 5; 10; 16},
thỏa mãn bài toán. (Lưu ý các tập con này không duy nhất).</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Tổng điểm bài 6</td><td>7,00</td></tr>
<tr><td>7</td><td>a</td><td>Xét thế hình sau đây.

</td><td></td></tr>
</table>

Đường tròn Ω_A qua A và tiếp xúc ngoài với (I), nên tiếp điểm A' thuộc cung $\overset{\frown}{NP}$ (cung không chứa M) của (I). Hơn nữa, các điểm A_c, A_b tương ứng thuộc các tia NA, PA. Gọi D là giao điểm thứ hai của AA' với (I). Ta có

$$\widehat{A_cA'N} = \widehat{A_cAA'} + \widehat{A'DN}$$
$$= \widehat{DNC} = \widehat{NA'D}.$$

Mặt khác $\widehat{A_cNA'} = \widehat{NDA'}$. Do đó, hai tam giác $A_cA'N, NA'D$ đồng dạng với nhau. Vậy

$$\frac{NA_c}{NA'} = \frac{DN}{DA'},$$

hay là,

$$NA_c = \frac{DN \cdot NA'}{DA'}. \tag{1}$$

Tương tự,

$$PA_b = \frac{DP \cdot PA'}{DA'}. \tag{2}$$

Áp dụng Định lý Ptoleme cho tứ giác điều hòa $DNA'P$, ta có:

$$DN \cdot PA' = NA' \cdot DP = \frac{1}{2} DA' \cdot NP.$$

Từ (1), (2), (3), ta có

$$NA_c + PA_b = \frac{DN \cdot NA' + DP \cdot PA'}{DA'}$$
$$\geq \frac{2\sqrt{DN \cdot PA' \cdot NA' \cdot DP}}{DA'}$$
$$= \frac{2DN \cdot PA'}{DA'} = \frac{DA' \cdot NP}{DA'} = NP.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $NA_c = PA_b$, tức là Ω_A là đường tròn đi qua A và tiếp xúc với (I) tại điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{NP}$ (cung không chứa M) của (I). Tương tự,

$$PB_a + MB_c \geq PM, \quad MC_b + NC_a \geq MN.$$

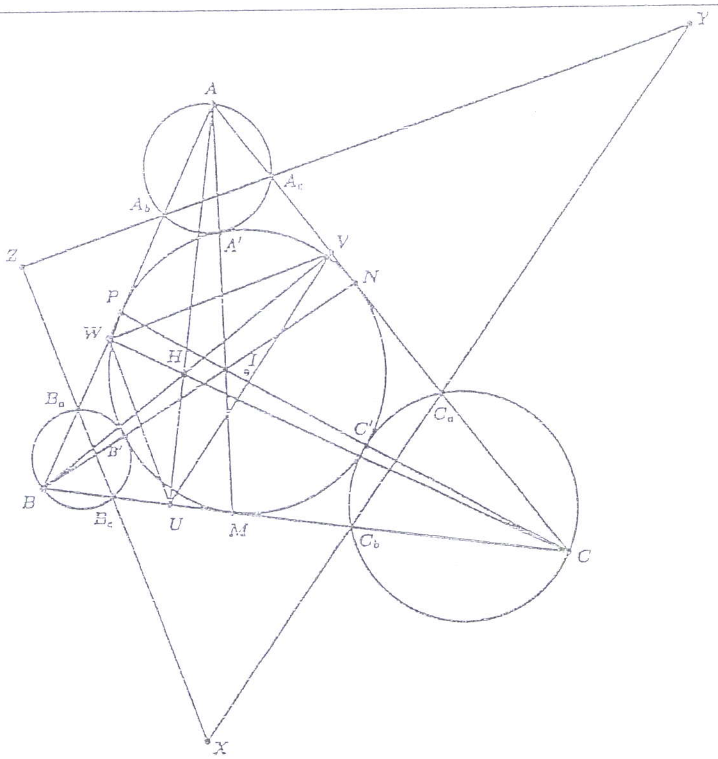
Từ đó, ta thu được điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các đường tròn $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ tiếp xúc với (I) tương ứng tại trung điểm của các cung $\overset{\frown}{NP}, \overset{\frown}{PM}, \overset{\frown}{MN}$.

Chú ý: Học sinh có thể chứng minh góc

$$\widehat{A_cEA_b} = 90^0 - \frac{\widehat{A}}{2}$$

không đổi (E là trung điểm của NP). Từ đó chứng minh rằng $PA_c + NA_b$ nhỏ nhất khi A' là trung điểm của cung NP.

b



Gọi AU, BV, CW là các đường cao của tam giác ABC. Giả sử ba đường thẳng A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b giới hạn cho ta tam giác XYZ kí hiệu như trong hình vẽ. Do Ω_C tiếp xúc ngoài với (I) tại C' và C, C', P thẳng hàng nên $\widehat{C'C_bC} = \widehat{BPC'}$. Do đó $\widehat{C'C_bC_a} + \widehat{C_aC_bC} = \widehat{C_aCC'} + \widehat{CAB}$. Mặt khác, $\widehat{C'C_bC_a} = \widehat{C_aCC'}$. Do đó $\widehat{C_aC_bC} = \widehat{CAB} = \widehat{VUC}$. Do đó, $XY // UV$. Tương tự, ta được

$$\widehat{B_aB_cB} = \widehat{CAB},\ YZ // VW,\ ZX // WU.$$

Từ đó, ta có tam giác XB_cC_b cân tại X. Theo cách tính ở câu a), ta có

$$NA_c = \frac{NA' \cdot NM}{2MA'}.$$

Mặt khác, trong tứ giác điều hòa $A'NMP$, ta có

$$NA' \cdot MP = \frac{1}{2} MA' \cdot NP \Rightarrow NA' = \frac{MA' \cdot NP}{2MP}.$$

Do đó $NA_c = \dfrac{NP \cdot NM}{2MP}$. Tương tự $NC_a = \dfrac{NP \cdot NM}{2MP}$. Vậy $NA_c = NC_a$. Do đó XM vuông góc với B_cC_b. Vậy I, M, X thẳng hàng. Tương tự, I, N, Y thẳng hàng và I, P, Z thẳng hàng.

Ta có I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ, H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác UVW. Mặt khác hai tam giác XYZ, UVW có các cạnh tương ứng song song. Do đó, đường thẳng IK song song với đường thẳng OH (để ý rằng OH đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác UVW và H, O, I không thẳng hàng).

Tổng điểm bài 7	7,00
Tổng điểm ngày 1+ ngày 2	40,00